מבחן מועד א - חדוא 1מ - סמסטר אביב תשע"ח

פתרון

שאלה מס' 1

א. צטטו במדוייק את משפט רול

משפט רול: תהא f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) כך ש- $f(a)=f(b)$.
אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

ב. הוכיחו את משפט רול

הוכחה: נתון ש- f רציפה בקטע סגור לכן לפי ווירשטראס היא מקבלת בו מינימום ומקסימום.

נניח שגם המינימום וגם המקסימום מתקבלים בקצות הקטע $[a,b]$. נתון ש- $f(a)=f(b)$ ולכן, המקסימום והמינימום שווים ולכן הפונקציה קבועה בקטע. לכן $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$ וסיימנו.

אחרת, המינימום או המקסימום מתקבלים בקטע הפתוח (a,b) כלומר, קיימת נקודה $c\in(a,b)$ שהיא נקודות קיצון מקומיות ולכן לפי משפט פרמה $f'(c)=0$.

ג. נתון שלפולינום $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots a_1x$ יש פתרון ממשי חיובי.
הוכיחו של- $p'(x)$ יש פתרון ממשי חיובי.

פתרון:

נסמן ב- x_0 את הפתרון. לפי הנתון $x_0>0$. נסתכל על הקטע הסגור $[0,x_0]$.
מתקיים $p(0)=p(x_0)=0$. פולינום הוא פונקציה רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$ ולכן בכל קטע סגור מתקיימים תנאי משפט רול. ולכן לפי משפט רול, קיימת נקודה $0<c<x_0$ כך ש- $p'(c)=0$.

ד. הוכיחו שלמשוואה הבאה יש פתרון יחיד בקטע $[1,e]$

$$\int_1^x t^2 \ln t dt = \frac{1}{x}$$

<u>פתרון:</u>

נגדיר פונקציה $f(x) = \int_1^x t^2 \ln t dt - \frac{1}{x}$.

f רציפה בקטע הסגור וגזירה בקטע הפתוח כסכום של גזירות ורציפות.

מתקיים $f(1) = -1 < 0$

$$f(e) = \int_1^e t^2 \ln t dt - \frac{1}{e} \quad =^{**} \quad \frac{t^3}{3} \ln t|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e t^2 dt - \frac{1}{e} =$$

$$= \quad \frac{e^3}{3} - \frac{t^3}{9}|_1^e - \frac{1}{e} = \frac{6e^4 + e - 9}{9e} > 0$$

לכן לפי ערך הביניים קיימת נקודה $0 < c < e$ כך ש- $f(c) = 0$

כמו כן, מתקיים $f'(x) = x^2 \ln x + \frac{1}{x^2} > 0$ לכל $x \in [1,e]$

$\Longleftarrow$ f מונוטונית עולה ממש בתחום זה $\Longleftarrow$ f חח"ע. לכן זהו פתרון יחיד.

** אינטגרציה בחלקים: $v' = t^2$ $\quad u = \ln t$

שאלה מס' 2

א. הציגו את הפונקציה $f(x) = x^2e^x$ כטור חזקות ומצאו את תחום ההתכנסות.

פתרון:

מתקיים: $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ ולכן $f(x) = x^2e^x = \sum_0^\infty \frac{x^{n+2}}{n!}$

תחום ההתכנסות: $x \in \mathbb{R}$

ב. נגדיר $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. הציגו את $F(x)$ כטור חזקות ומצאו את תחום ההתכנסות.

פתרון:

לפי משפט אינטגרציה איבר איבר מתקיים:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_0^\infty \frac{x^{n+3}}{(n+3)n!}$$

תחום ההתכנסות: $x \in \mathbb{R}$

ג. חשבו

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n+3)n!}$$

$$F(1) = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t^2e^t dt \quad =^{**} \quad e-2$$

** פעמיים אינטגרציה בחלקים.

כמו כן,

$$F(1) = \sum_0^\infty \frac{1^{n+3}}{(n+3)n!} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n+3)n!}$$

לכן, $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n+3)n!} = F(1) - \frac{7}{12} = e - \frac{31}{12}$

חלק ב - הוכח או הפרך

בשאלות הבאות אם הטענה נכונה יש להוכיח אותה או במידה ואינה נכונה, יש להפריך על ידי דוגמה נגדית מנומקת היטב.

שאלה מס' 3 (8 נקודות)

תהא $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ותהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה אי זוגית אזי $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$

פתרון: הטענה נכונה

f פונקציה אי זוגית ולכן (הוכחנו) $f(0) = 0$.

f פונקציה רציפה ולכן $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

לכן, לפי היינה, לכל סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

שאלה מס' 4 (8 נקודות)

תהא $\{a_n\}$ סדרה מתכנסת וחסומה. נסמן: $\sup\{a_n\} = M$; $\inf\{a_n\} = m$

אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = M$ או $\lim_{n\to\infty} a_n = m$

פתרון: הטענה לא נכונה

למשל: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (יש לנמק)

שאלה מס' 5 (8 נקודות)

אם $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ אזי הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת.

פתרון: הטענה לא נכונה

למשל: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (יש לנמק)

שאלה מס' 6 (8 נקודות)

תהא f פונקציה חיובית גזירה ברציפות (גם הנגזרת היא פונקציה רציפה) בכל $\mathbb{R}$.
נתון ש- $f(0)=0$ וגם $f'(0)=1$. אזי הטור $\Sigma_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n^2})$ מתכנס.

פתרון: הטענה נכונה
לפי הגדרת הנגזרת והנתון, $1=f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$
f פונקציה חיובית, נשתמש במבחן השוואה גבולי עם הטור $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ שמתכנס ובהיינה עבור הסדרה $a_n=\frac{1}{n^2}$.

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{a_n}$$

לכן הטורים מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

חלק ג - שאלות אמריקאיות

שאלה מס' 7: (5 נקודות)

הגבול $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$ שווה

1. 0
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. $\frac{\pi}{4}$
5. $\frac{\pi}{6}$

סכומי רימן עבור הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

שאלה מס' 8 (5 נקודות)

תהא f פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$ המקיימת $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $f(0) = 10$.
אזי בהכרח:

1. $f(x)$ גזירה ב- $x = 0$
2. $f(x)$ קמורה ב- $\mathbb{R}$
3. **$f(x)$ מקבלת מקסימום ב- $\mathbb{R}$**
4. $f(x)$ מקבלת מינימום ב- $\mathbb{R}$
5. $f(x)$ מונוטונית עולה ב- $\mathbb{R}$

אפשר להוכיח את הטענה בעזרת הגדרת הגבול וערך הביינים.
דוגמא נגדית לכל האחרים:

$$f(x) = \begin{cases} 10e^{-x}, & x \geq 0 \\ 5e^{x} + 5, & x < 0 \end{cases}$$

שאלה מס' 9 (5 נקודות)

נתון $\lim_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$. אזי תחום ההתכנסות של טור החזקות $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ הוא:

1. $(-\infty, \infty)$
2. $(-L, L)$
3. **$(-1, 1)$**
4. $[-L, L)$
5. מתכנס רק עבור $x = 0$

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1$$

לא מתכנס בקצוות כי הסדרה לא שואפת לאפס.

שאלה מס' 10: (5 נקודות)

תהא f פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[0,1]$ כך שמתקיים $\int_0^1 e^{-x}(f'(x)-f(x))dx = 1$.
בנוסף, נתון ש- $f(0)=0$. אזי $f(1)$ שווה ל- :

1. 0
2. e
3. $\frac{1}{e}$
4. 1
5. לא ניתן לקבוע

$$1 = \int_0^1 e^{-x}(f'(x)-f(x))dx = \int_0^1 e^{-x}f'(x)dx - \int_0^1 e^{-x}f(x)dx =$$

$$\int_0^1 e^{-x}f'(x)dx - (-e^{-x}f(x)|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}f'(x)dx) = e^{-1}f(1) - e^0 f(0)$$

** אינטגרציה בחלקים: $v' = e^{-x}$ $\qquad u = f(x)$

שאלה מס' 11: (5 נקודות)

תהא $f(x) = x[x]$ פונקציה מוגדרת בקטע $[0,3]$ כאשר $[x]$ הוא הערך השלם של x אזי:

1. הפונקציה f לא גזירה מימין בנקודה $x_0 = 0$
2. לפונקציה f יש 4 נקודות אי רציפות.
3. קיים $x_0 \in [0,3]$ כך ש- $f(x_0) = 5.1$
4. קיים $x_0 \in [0,3]$ כך ש- $f(x_0) = 3$
5. הפונקציה f רציפה בקטע הנתון.

קל לראות ע"י שרטוט הגרף בתחום הנתון או ערך הביניים

שאלה מס' 12: (5 נקודות)

תהא f פונקציה חח"ע ועל ב- $\mathbb{R}$.

פולינום טיילור מסדר 2 סביב $x_0 = 0$ של הפונקציה f נתון ע"י $p_2(x) = 6 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{10}$.

הישר המשיק לגרף הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(x)$ בנקודה $x = 6$ נתון ע"י:

1. $y = x$
2. לא ניתן לחשב
3. $y = 0$
4. $y = 6 - \frac{x}{4}$
5. $y = 24 - 4x$

פולינום טיילור מסדר 2 סביב אפס: $p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(x)}{2}x^2$

מהנתון ניתן להסיק

$$f(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(6) = 0$$

$$f'(0) = -\frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(6) = -4$$

משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה x_0 נתון ע"י: $y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$.